

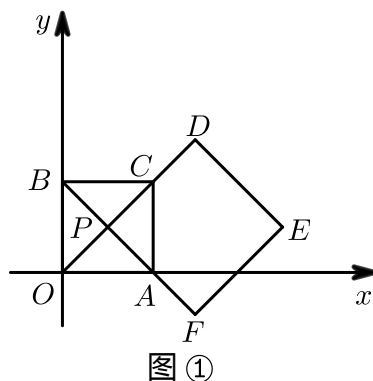
第3讲几何变换之旋转

一、单线段最值

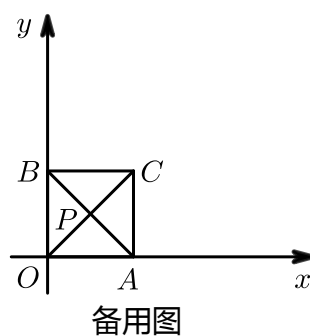
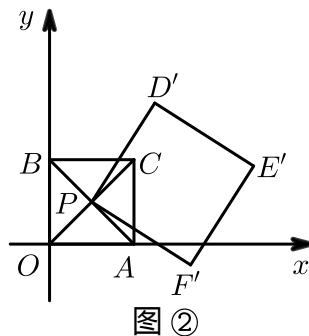
1. 找隐圆

典题精炼

1. 如图①，在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是正方形，点 P 为正方形 $AOBC$ 对角线的交点，点 $O(0,0)$ ，点 $A(2,0)$ ，点 $B(0,2)$ ，分别延长 OC 到 D ， PA 到 F ，使 $PD = 2PC$ ， $PF = 2PA$ ，再以 PD ， PF 为邻边作平行四边形 $PDEF$ 。



- (1) 求点 D 的坐标。
- (2) 如图②，将四边形 $PDEF$ 绕点 P 逆时针旋转四边形 $PD'E'F'$ ，点 D ， E ， F 旋转后的对应点分别为 D' ， E' ， F' ，旋转角为 $\alpha(0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ 。



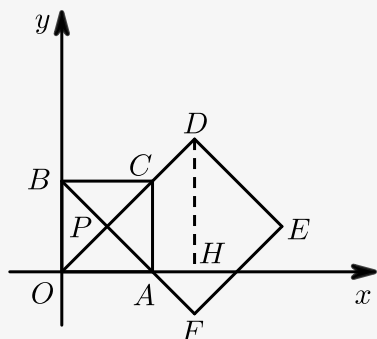
- ① 在旋转过程中，当 $\angle PBD' = 90^\circ$ 时，求点 D' 的坐标。
- ② 在旋转过程中，求 BE' 的取值范围（直接写出结果即可）。

【答案】 (1) $(3, 3)$ 。

(2) ① D' 坐标为 $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 或 $(-\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ 。

$$\textcircled{2} \quad 4 - \sqrt{2} \leq BE' \leq 4 + \sqrt{2}.$$

【解析】(1) 如图①，过D点作 $DH \perp x$ 轴，垂足为H，



图①

$\because ADBC$ 是正方形，

$$\therefore OP = PC = \frac{1}{2}OC, \angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOB = 45^\circ, AB \perp OC,$$

$$\therefore A(2,0), B(0,2),$$

$$\therefore AO = OB = BC = AC = 2,$$

$$\therefore OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OP = PC = \sqrt{2}, PD = 2PC,$$

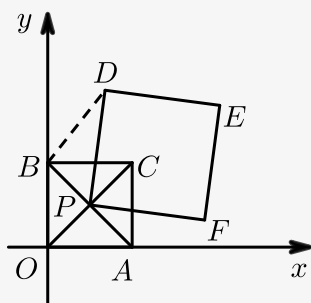
$$\therefore OD = 3OP = 3\sqrt{2},$$

$$OH = DH = \frac{\sqrt{2}}{2}OP = 3,$$

$$\therefore \text{点} D \text{坐标为}(3,3).$$

(2) ① 在旋转过程中， $\angle PBD' = 90^\circ$ 有两种情况．

如图②，作 $D'M \perp y$ 轴垂足为M，



图②

由旋转性质可知， $PD' = PD$ ，

$$\therefore PD = 2PC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore PD' = PD = 2\sqrt{2},$$

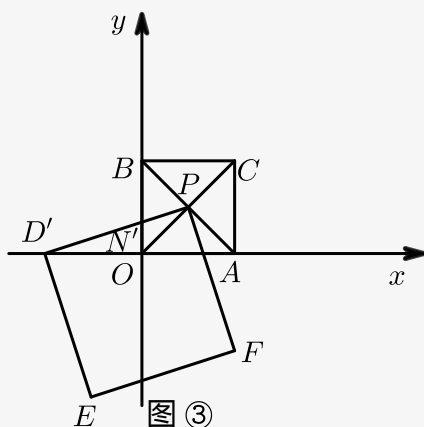
$$\therefore PB = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore BD = \sqrt{PD'^2 - PB^2} = \sqrt{6}.$$

$$\therefore \angle PBO = \frac{1}{2}\angle OBC = 45^\circ \text{ 且 } \angle D'BP \text{ 为 } 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle D'BM &= 45^\circ, \\ \therefore BM &= D'M = \frac{\sqrt{2}}{2}BD' = \sqrt{3}, \\ \therefore D' \text{坐标为} &(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

如图③,



同理可得 $BD' = \sqrt{6}$,

过 D' 作 $D'N' \perp y$ 轴, 垂足为 N' ,

此时 $BN = D'N = \sqrt{3}$,

D' 坐标为 $(-\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$.

综上所述, 当 $\angle PBD' = 90^\circ$ 时, 点 D' 的坐标为 $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 或 $(-\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$.

② 当点 B, P, E' 共线时, BE' 有最小值最大值,

即 $BE' \leq BP + PE$,

$BE' \geq PE - BP$,

$4 - \sqrt{2} \leq BE' \leq 4 + \sqrt{2}$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

2. 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 点 $A(3, 4)$, 点 $B(6, 0)$.

(1) 如图①, 求 AB 的长.

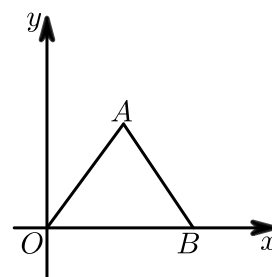


图 ①

- (2) 如图②，把图①中的 $\triangle OAB$ 绕点 B 顺时针旋转，使点 O 的对应点 M 恰好落在 OA 延长线上， N 是点 A 旋转后的对应点。

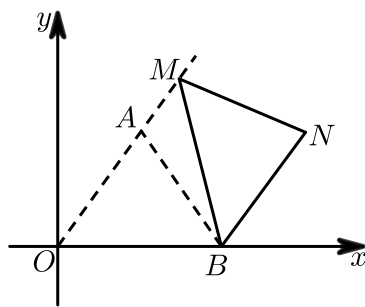


图 ②

- ① 求证： $BN \parallel OM$.
 ② 求点 N 的坐标 .
- (3) 点 C 是 OB 的中点，点 D 为线段 OA 上的动点，在 $\triangle OAB$ 绕点 B 顺时针旋转过程中，点 D 的对应点是 P ，求线段 CP 长的取值范围（直接写出结果） .

【答案】(1) 5 .

(2) ① 证明见解析 .

② $N(9, 4)$.

(3) $\frac{9}{5} \leq CP \leq 9$.

【解析】(1) $AB = \sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2}$
 $= \sqrt{9+16}$
 $= 5$.

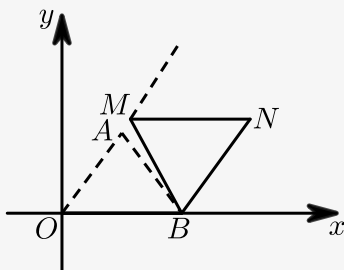
(2) ① $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(6, 0)$,

$\therefore OA = 5$, $AB = 5$,

$\therefore \triangle AOB$ 为等腰三角形 ,

$\therefore \angle AOB = \angle ABO$,

$\therefore$ 绕 B 点旋转 ,



$\therefore BO = BM$, $\angle BOM = \angle BMO$,

$\angle MBN = \angle OBA = \angle BOM$,

$$\therefore \angle OMB = \angle MBN,$$

$$\therefore BN \parallel OM.$$

$$\textcircled{2} \because AO = AB, BA = BN,$$

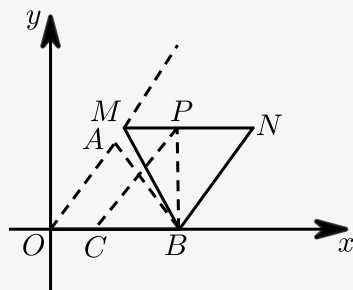
$$\therefore AO = NB,$$

$$\therefore BN \parallel OM,$$

$\therefore$ 四边形 $AOBN$ 为平行四边形,

$$\therefore N(9, 4).$$

(3) 如图, 作 $BP \perp MN$ 于 P ,



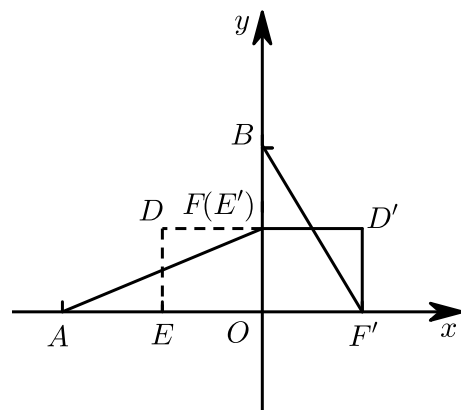
$$\begin{aligned} \text{则 } BP &= \frac{4 \times 6}{5} = \frac{24}{5}, \text{ 当点 } P \text{ 在 } BC \text{ 的延长线上时, } PC \text{ 的值最小, 最小值} \\ &= \frac{24}{5} - 3 = \frac{9}{5}, \text{ 当点 } P \text{ 与点 } M \text{ 重合, 旋转到点 } M \text{ 在 } CB \text{ 的延长线上时, } PC \text{ 的值} \\ &\text{最大, 最大值} = 3 + 6 = 9, \\ &\therefore \frac{9}{5} \leq CP \leq 9. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

经典再现

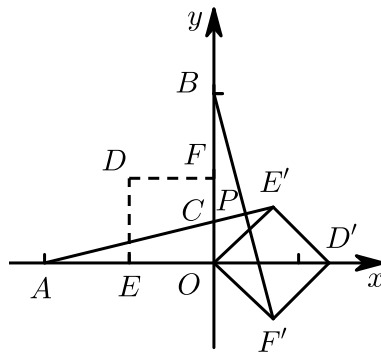
3. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $A(-2, 0)$, 点 $B(0, 2)$, 点 E , 点 F 分别为 OA , OB 的中点. 若正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转, 得正方形 $OE'D'F'$, 记旋转角为 α .

(1) 如图①, 当 $\alpha = 90^\circ$, 求 AE' , BF' 的长.



图①

(2) 如图②, 当 $\alpha = 135^\circ$, 求证 $AE' = BF'$, 且 $AE' \perp BF'$.



图②

(3) 若直线 AE' 与直线 BF' 相交于点 P , 求点 P 的纵坐标的最大值 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) AE' , BF' 的长都等于 $\sqrt{5}$.

(2) 证明见解析.

(3) 点 P 的纵坐标的最大值为 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

【解析】 (1) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 E' 与点 F 重合, 如图①.

$\because$ 点 $A(-2, 0)$ 点 $B(0, 2)$,

$\therefore OA = OB = 2$.

$\because$ 点 E , 点 F 分别为 OA , OB 的中点,

$\therefore OE = OF = 1$,

$\because$ 正方形 $OE'D'F'$ 是正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到的,

$\therefore OE' = OE = 1$, $OF' = OF = 1$.

在 $Rt\triangle AE'O$ 中, $AE' = \sqrt{OA^2 + OE'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

在 $Rt\triangle BOF'$ 中, $BF' = \sqrt{OB^2 + OF'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$\therefore AE'$, BF' 的长都等于 $\sqrt{5}$.

(2) 当 $\alpha = 135^\circ$ 时, 如图②.

$\because$ 正方形 $OE'D'F'$ 是由正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 135° 所得,

$\therefore \angle AOE' = \angle BOF' = 135^\circ$.

在 $\triangle AOE'$ 和 $\triangle BOF'$ 中,

$$\begin{cases} AO = BO \\ \angle AOE' = \angle BOF' \\ OE' = OF' \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE' \cong \triangle BOF' (SAS)$.

$\therefore AE' = BF'$, 且 $\angle OAE' = \angle OBF'$.

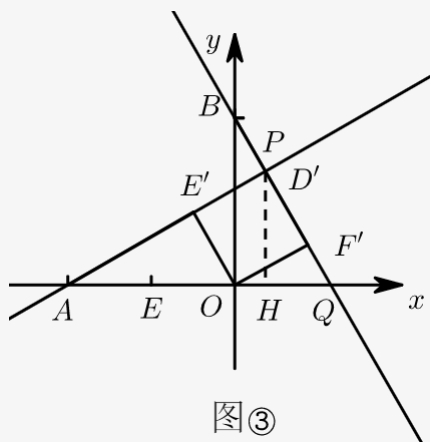
$\because \angle ACB = \angle CAO + \angle AOC = \angle CBP + \angle CPB$, $\angle CAO = \angle CBP$,

$$\therefore \angle CPB = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE' \perp BF'.$$

(3) 方法一：在第一象限内，当点 D' 与点 P 重合时，点 P 的纵坐标最大。

过点 P 作 $PH \perp x$ 轴，垂足为 H ，如图③所示。



图③

$$\therefore \angle AE'O = 90^\circ, E'O = 1, AO = 2,$$

$$\therefore \angle E'AO = 30^\circ, AE' = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AP = \sqrt{3} + 1.$$

$$\therefore \angle AHP = 90^\circ, \angle PAH = 30^\circ,$$

$$\therefore PH = \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的纵坐标的最大值为 } \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

方法二： $\because \angle BPA = \angle BOA = 90^\circ$ ，点 P 、 B 、 A 、 O 四点共圆，

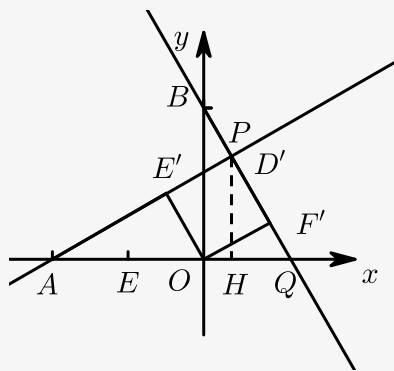
$\therefore$ 当点 P 在劣弧 OB 上运动时，点 P 的纵坐标随着 $\angle PAO$ 的增大而增大。

$\because OE' = 1$ ， $\therefore$ 点 E' 在以点 O 为圆心，1为半径的圆 O 上运动，

$\therefore$ 当 AP 与圆 O 相切时， $\angle E'AO$ （即 $\angle PAO$ ）最大，

此时 $\angle AE'O = 90^\circ$ ，点 D' 与点 P 重合，点 P 的纵坐标达到最大。

过点 P 作 $PH \perp x$ 轴，垂足为 H 。



$$\therefore \angle AE'O = 90^\circ, E'O = 1, AO = 2,$$

$$\therefore \angle E'AO = 30^\circ, AE' = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AP = \sqrt{3} + 1.$$

$$\begin{aligned} \because \angle AHP &= 90^\circ, \angle PAH = 30^\circ, \\ \therefore PH &= \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \\ \therefore \text{点} P \text{的纵坐标的最大值} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{aligned}$$

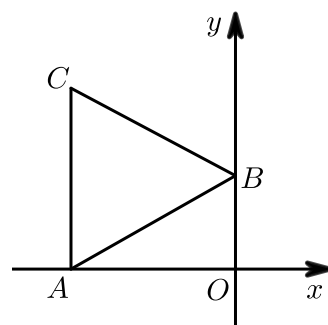
【标注】【知识点】正方形与全等综合

2. 构造中位线

典题精炼

4. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-3,0)$ ，点 $B(0,\sqrt{3})$ 。以 AB 为一边作等边三角形 ABC ，点 C 在第二象限。

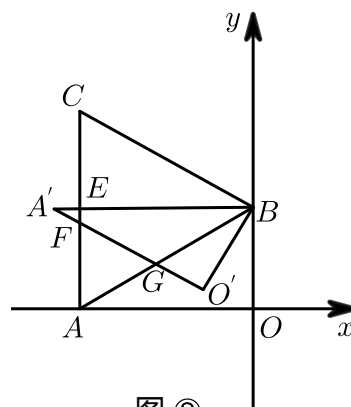
(1) 如图①，求点 C 的坐标。



图①

(2) 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 顺时针旋转得 $\triangle A'O'B$ ，点 A 、 O 旋转后的对应点为 A' 、 O' 。

- ① 如图②，当旋转角为 30° 时， $A'B$ 、 $A'O'$ 与 AC 分别交于点 E 、 F 。 $A'O'$ 与 AB 交于点 G ，求 $\triangle A'O'B$ 与 $\triangle ABC$ 公共部分面积 S 的值。



图②

- ② 若 P 为线段 CO' 的中点，求 AP 长的取值范围（直接写出结果即可）。

【答案】(1) $(-3, 2\sqrt{3})$ 。

(2) ① $6 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$ 。

$$\textcircled{2} \quad 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq AP \leq 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

【解析】(1) $\because A(-3, 0), B(0, \sqrt{3})$,

$$\therefore OA = 3, OB = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中,

$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2OB = 2\sqrt{3},$$

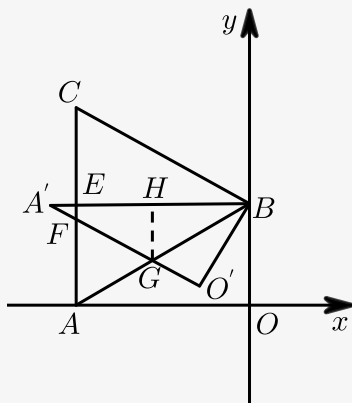
$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ, AC = AB = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \angle CAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (-3, 2\sqrt{3}).$$

(2) ①



过点 G 作 $GH \perp A'B$ 于点 H ,

$\therefore$ 将 $\triangle AOB$ 顺时针旋转 30° , 得 $\triangle A'O'B$,

$$\therefore A'B = AB = 2\sqrt{3}, \angle A' = \angle BAO = 30^\circ, \angle A'BA = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle A' = \angle A'BA = 30^\circ,$$

$$\therefore GA' = GB,$$

$$\therefore GH \perp A'B,$$

$$\therefore A'H = \frac{1}{2}A'B = \sqrt{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle A'HG$ 中,

$$\therefore \tan \angle BA'G = \frac{GH}{A'H},$$

$$\therefore GH = \sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = 1.$$

$$\therefore S_{\triangle A'BG} = \frac{1}{2}A'B \cdot GH = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ, \angle A'BG = 30^\circ,$$

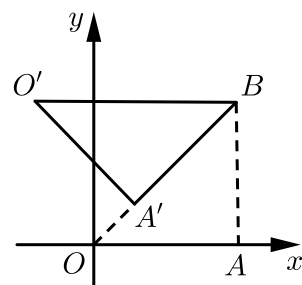
$$\therefore \angle A'EF = \angle CAB + \angle A'BG = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BEA$ 中,

$$\therefore S = S_{\triangle A'BG} - S_{\triangle A'EF} = 6 - \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

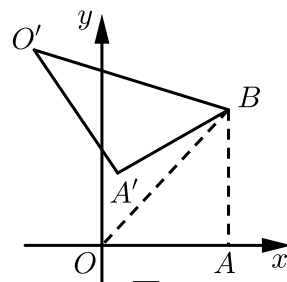
$$\therefore 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq AP \leq 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

10



图①

(2) 如图② , 当 $\alpha = 60^\circ$ 时 , 求点 A' 的坐标 .



图②

(3) 连接 OA' , 设线段 OA' 的中点为 M , 连接 $O'M$. 求线段 $O'M$ 的长的最小值 (直接写出结果即可) .

【答案】 (1) $(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

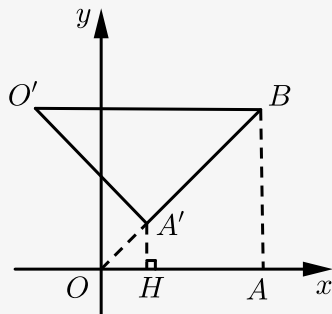
(2) $(2 - \sqrt{3}, 1)$.

(3) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

【解析】 (1) 由旋转可知 $AB = A'B = 2$, $OB = 2\sqrt{2}$,

故 $OA' = OB - A'B = 2\sqrt{2} - 2$,

作 $A'H \perp OA$ 于 H ,



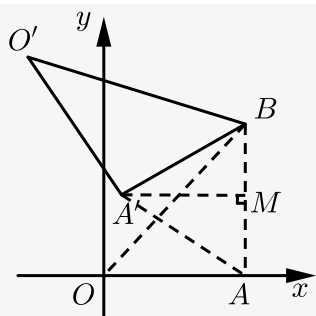
$$\therefore OH = A'H = \frac{OA'}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} ,$$

故 $A'(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

(2) 由旋转知 : $AB = A'B$, $\angle ABA' = 60^\circ$,

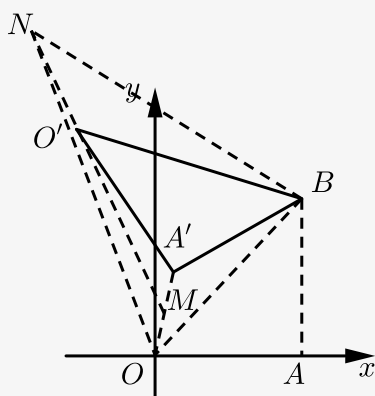
$\therefore \triangle ABA'$ 为等边三角形 ,

作 $A'M \perp AB$ 于 M ,



$$\begin{aligned} AM &= AB \sin 60^\circ = \sqrt{3}, \\ BM &= AM = \frac{1}{2} AB = 1, \\ \therefore A' &(2 - \sqrt{3}, 1). \end{aligned}$$

(3) 延长 $A'O'$ 至 N 点, 使 $A'O' = O'N$, 连接 ON , BN ,



$$\begin{aligned} \therefore A'N &= A'O' + O'N = 4, \quad A'B = 2, \\ \therefore BN &= \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \\ \therefore N &\text{在以 } B \text{ 为圆心, 以 } 2\sqrt{5} \text{ 为半径为直径的圆,} \\ \text{当 } N &\text{在 } BD \text{ 延长线时, } ON \text{ 有最小,} \\ ON_{\min} &= BN - OB = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}, \\ \text{而 } O'M_{\min} &= \frac{1}{2} ON_{\min} = \sqrt{5} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

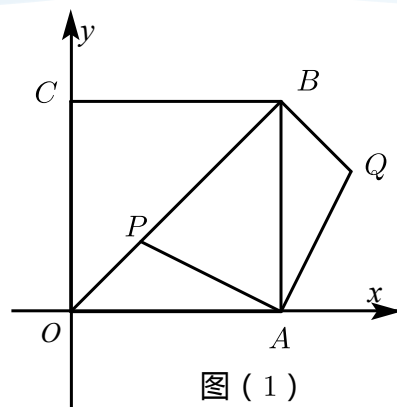
【标注】【知识点】坐标系中的旋转

二、旋转与面积最值

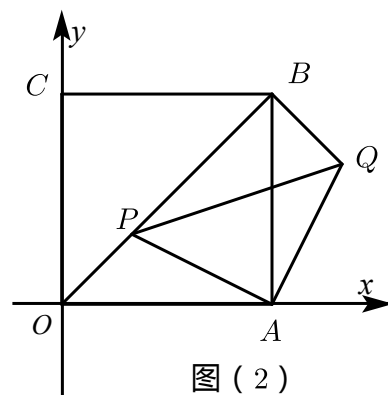
典题精炼1

6. 在平面直角坐标系中, 四边形 $OABC$ 是正方形, O 是原点, 点 A 在 x 轴上, 点 C 在 y 轴上, 点 $B(6, 6)$, P 是射线 OB 上一点, 将 $\triangle AOP$ 绕点 A 顺时针旋转 90° , 得 $\triangle ABQ$, Q 是点 P 旋转后的对应点.

(1) 如图(1)当 $OP = 2\sqrt{2}$ 时, 求点 Q 的坐标.



- (2) 如图(2), 设点 $P(x, y)$ ($0 < x < 6$), $\triangle APQ$ 的面积为 S . 求 S 与 x 的函数关系式, 并写出当 S 取最小值时, 点 P 的坐标.



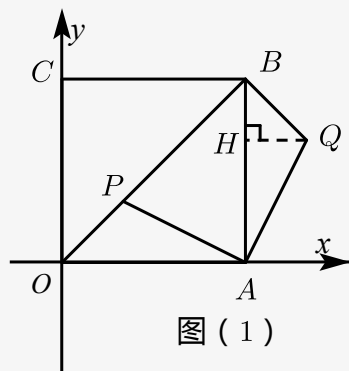
- (3) 当 $BP + BQ = 8\sqrt{2}$ 时, 求点 Q 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $Q(8, 4)$.

(2) $S = (x - 3)^2 + 9$, $P(3, 3)$.

(3) $Q(13, -1)$.

【解析】 (1) 过 Q 作 $QH \perp AB$ 于 H 点, 如图(1),



在 $\triangle OAP$ 和 $\triangle BAQ$ 中,

$$\begin{cases} PA = AQ \\ \angle OAB = \angle PAQ, \\ OA = QA \end{cases}$$
 $\therefore \triangle OAP \cong \triangle BAQ (\text{SAS}),$

$$\therefore OP = BQ, \angle POA = \angle QBA = 45^\circ,$$

$$\therefore OP = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BQ = 2\sqrt{2},$$

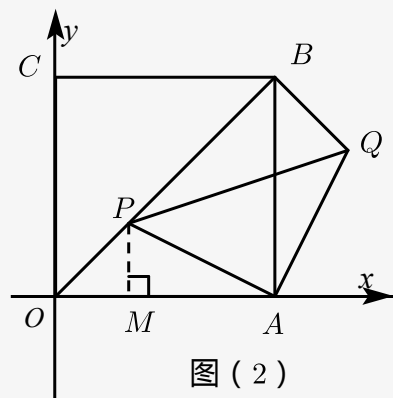
$$\text{在Rt}\triangle BQH\text{中}, BQ = 2\sqrt{2}, \angle QBH = 45^\circ,$$

$$\therefore BH = HQ = 2,$$

$$\therefore B(6, 6),$$

$$\therefore Q(8, 4).$$

(2) 过P作 $PM \perp OA$ 于M点, 如图(2),



图(2)

$\therefore$ 四边形OABC为正方形,

$$\therefore \angle BOA = 45^\circ,$$

$\therefore P$ 在射线OB上, $0 < x < 6$,

$\therefore P$ 在线段OB上,

$\therefore PM \perp OA$,

$\therefore \triangle POM$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore OM = PM = x,$$

$$\therefore OA = 6,$$

$$\therefore MA = 6 - x,$$

在Rt $\triangle PMA$ 中,

$$PA^2 = PM^2 + MA^2 = x^2 + (6 - x)^2 = 2x^2 - 12x + 36,$$

$$\therefore PA = AQ, \angle PAQ = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle APQ$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore S = \frac{1}{2}AP^2 = \frac{1}{2}(2x^2 - 12x + 36) = x^2 - 6x + 18,$$

$$S = x^2 - 6x + 18 = (x - 3)^2 + 9,$$

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时, $S_{\text{最小}} = 9$, 此时 $P(3, 3)$.

(3) ①当P在线段OB上时,

$$\therefore \triangle OAP \cong \triangle BAQ,$$

$$\therefore OP = BQ ,$$

$$\therefore BP + BQ = BP + OP = OB ,$$

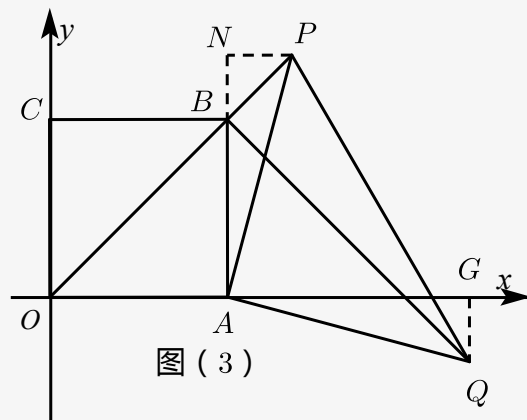
$$\therefore B(6,6) ,$$

$$\therefore OB = 6\sqrt{2} ,$$

$$\therefore BP + BQ = 6\sqrt{2} , \text{ 与题干不符, 舍去 .}$$

②当P在OB延长线时, 如图(3),

过P作PN⊥AB交AB延长线于N, 过Q作QG⊥x轴于G, 设BP = x ,



$$\therefore \triangle OAP \cong \triangle BAQ ,$$

$$\therefore OP = BQ ,$$

$$\therefore OB = 6\sqrt{2} ,$$

$$\therefore OP = BQ = 6\sqrt{2} + x ,$$

$$\therefore BP + BQ = BP + OP = x + 6\sqrt{2} + x = 8\sqrt{2} ,$$

$$\therefore x = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore BP = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \angle PBN = \angle OBA = 45^\circ ,$$

$$\therefore BN = PN = 1 ,$$

$$\therefore AN = 6 + 1 = 7 ,$$

$$\therefore \angle NAG = \angle PAQ = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle NAP = \angle GAQ ,$$

$\therefore$ 在 $\triangle PAN$ 和 $\triangle QAC$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle NAP = \angle GAQ \\ \angle PNA = \angle QGA = 90^\circ , \\ PA = AQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PAN \cong \triangle QAC ,$$

$$\therefore NA = AG , NP = QG ,$$

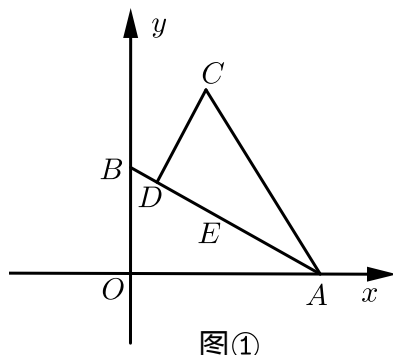
$$\therefore NP = QG = 1, NA = AG = 7 ,$$

$$\therefore Q(13, -1) .$$

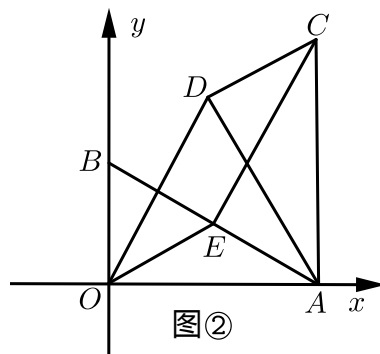
典题精炼2

7. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，点 $B(0, 1)$ ，点 E 是边 AB 中点，把 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $\triangle ADC$ ，点 O, B 旋转后的对应点分别为 D, C ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，当点 D 恰好在 AB 上时，求点 D 的坐标。



(2) 如图②，若 $\alpha = 60^\circ$ 时，求证：四边形 $OECD$ 是平行四边形。



(3) 连接 OC ，在旋转的过程中，求 $\triangle OEC$ 面积的最大值（直接写出结果即可）。

【答案】(1) $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

(2) 证明见解析。

(3) $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$ 。

【解析】(1) 由题意： $OA = \sqrt{3}$ ， $OB = 1$ ，

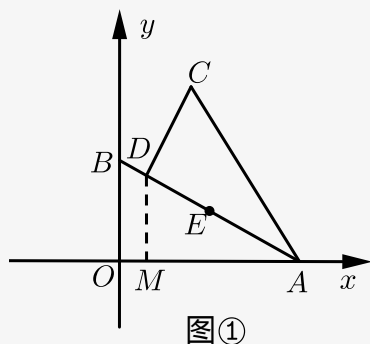
$$\therefore \text{在} \triangle AOB \text{中}, \angle AOB = 90^\circ, \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

$\therefore \triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转得 $\triangle ADC$ ，

$$\therefore DA = OA = \sqrt{3},$$

过点 D 作 $DM \perp OA$ 于点 M ，如图①：



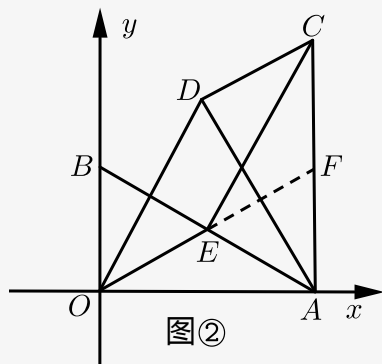
在 $\text{Rt}\triangle DAM$ 中， $\angle BAO = 30^\circ$ ，

$$\therefore DM = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{AM}{AD}, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{\sqrt{3}}, AM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore OM = AO - AM = \sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

$$\therefore D\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(2) 延长 OE 交 AC 于点 F ，如图②：



在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，点 E 为 AB 中点， $\angle BAO = 30^\circ$ ，

$$\therefore OE = BE = AE,$$

又 $\because \angle ABO = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle BOE$ 是等边三角形，

$$\therefore OE = OB, \angle BOE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EOA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

由旋转性质得 $DC = OB$ ，

$$\therefore OE = DC,$$

$$\because \alpha = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = 60^\circ,$$

由旋转性质知： $\angle DAC = \angle OAB = 30^\circ$ ， $\angle DCA = \angle OBA = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle OAC = \angle OAD + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OFA = 90^\circ - \angle EOA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle OFA ,$$

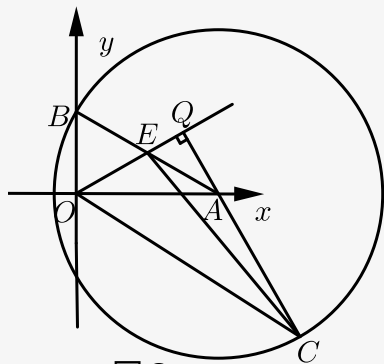
$$\therefore OE \parallel DC ,$$

$$\text{又} \because OE = DC ,$$

$\therefore$ 四边形 $OECD$ 是平行四边形 .

(3) 以 OE 为底 , 若求 $\triangle OEC$ 面积最大则求高最大即可即点 C 到直线 OE 的距离最大 ,

$\therefore$ 以点 A 为圆心 , AB 为半径画圆即为点 C 的运动轨迹 , 当点 C 在优弧上 , 且 $CA \perp OE$ 于 Q 时 , 高最大 , 如图③ :



图③

$$\text{在 Rt} \triangle AOB \text{ 中 , } AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{3 + 1} = 2 ,$$

$$\therefore AC = AB = 2 ,$$

$$\text{又} \because \angle BEO = \angle QEA = 60^\circ ,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle AEQ \text{ 中 , } \sin 60^\circ = \frac{AQ}{AE} , \quad AQ = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore CQ = AC + AQ = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot CQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{3}}{4} .$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】坐标与距离

【知识点】坐标与面积

【知识点】坐标系中的旋转-图形关于原点的旋转

8. 在平面直角坐标系中 , $\triangle ABC$ 是直角三角形 , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(1,0)$, 点 $B(-1,0)$, 点 C 在第二象限 , 点 $P(-2, \sqrt{3})$.

(1) 如图①, 求 C 点坐标及 $\angle PCB$ 的大小.

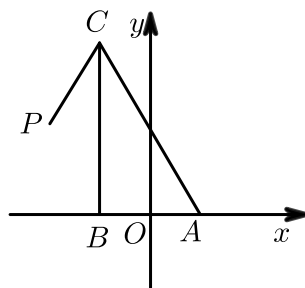


图 ①

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕 C 点逆时针旋转得到 $\triangle MNC$, 点 A, B 的对应点分别为点 M, N , S 为 $\triangle PMN$ 的面积.

① 如图②, 当点 N 落在边 CA 上时, 求 S 的值;

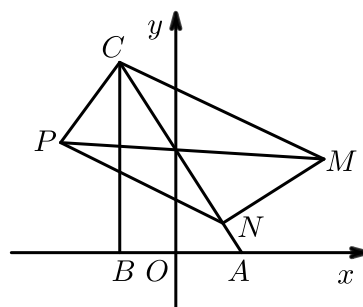


图 ②

② 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $C(-1, 2\sqrt{3})$, $\angle PCB = 30^\circ$.

(2) ① $2\sqrt{3} - 1$.

② $2\sqrt{3} - 2 \leq S \leq 2\sqrt{3} + 2$.

【解析】 (1) $\because$ 点 $A(1, 0)$, 点 $B(-1, 0)$,

$$\therefore OA = 1, OB = 1,$$

$$\therefore AB = 2,$$

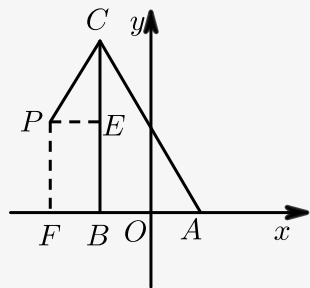
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 60^\circ$,

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore BC = AB \cdot \tan 60^\circ = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore C(-1, 2\sqrt{3}),$$

过点 P 作 $PE \perp CB$, 垂足为点 E , 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴, 垂足为点 F ,



可证得四边形 $PFBE$ 是矩形，

$$\therefore P(-2, \sqrt{3}),$$

$$\therefore OF = 2, PF = \sqrt{3},$$

$$\therefore FB = OF - OB = 1,$$

$$\therefore BE = PF = \sqrt{3}, PE = FB = 1,$$

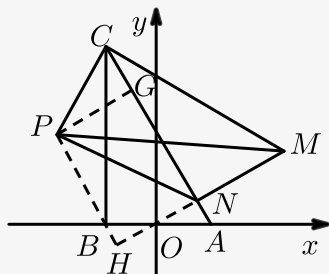
$$\therefore CE = CB - BE = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle CPE$ 中，

$$\therefore \tan \angle PCE = \frac{PE}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle PCB = 30^\circ.$$

(2) ① 过点 P 作 $PH \perp$ 直线 MN ，垂足为点 H ，过点 P 作 $PG \perp AC$ ，垂足为点 G ，



可证得四边形 $PHNG$ 是矩形，

$$\therefore PH = GN,$$

$\therefore \triangle MNC$ 是由 $\triangle ABC$ 旋转得到，

$$\therefore CN = CB = 2\sqrt{3}, MN = AB = 2,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA = 30^\circ,$$

由 (1) 得 $\angle PCB = 30^\circ, PE = 1$ ，

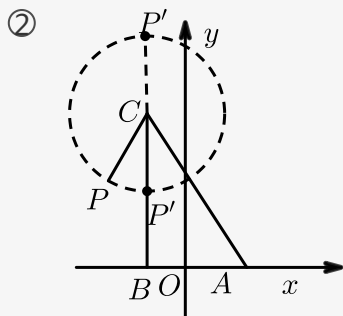
$$\therefore PC = 2, \angle PCG = \angle PCB + \angle BCA = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle PCG$ 中， $\angle CPG = 30^\circ$ ，

$$\therefore CG = \frac{1}{2}PC = 1,$$

$$\therefore PH = GN = CN - CG = CB - CG = 2\sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}MN \cdot PH = \frac{1}{2} \times 2 \times PH = PH = 2\sqrt{3} - 1.$$



P 绕 C 旋转,以 C 为圆心,以 CP 为半径,设 P 的对应点为 P' ,

由相对运动转化可知求 $\triangle PMN$ 的面积的范围,

即求 $\triangle P'AB$ 的面积的范围,

当 P' 运动到圆最下方位置时, $BP' = BC - CP' = 2\sqrt{3} - 2$,

$$S_{\min} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BP' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2\sqrt{3} - 2) = 2\sqrt{3} - 2,$$

当 P' 运动到圆最上方位置时, $BP' = BC + CP' = 2\sqrt{3} + 2$,

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BP' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2\sqrt{3} + 2) = 2\sqrt{3} + 2,$$

$$\therefore 2\sqrt{3} - 2 \leq S \leq 2\sqrt{3} + 2.$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

9. 如图,在平面直角坐标系中, O 为原点,点 $A(0,4)$, $B(-4,0)$, $C(4,0)$.

(1) 如图①,若 $\angle BAD = 15^\circ$, $AD = 3$,求点 D 的坐标.

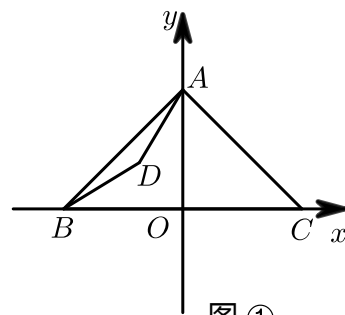


图 ①

(2) 如图②, $AD = 2$,将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针方向旋转得到 $\triangle ACE$,点 B , D 的对应点分别为 C , E .连接 DE , BD 的延长线与 CE 相交于点 F .

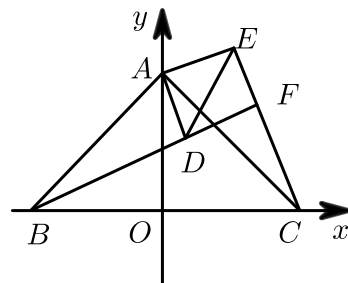


图 ②

② 证明： $BF \perp CE$.

图 ③

(2)① $2\sqrt{2}$.

$$(3) \frac{9-4\sqrt{2}}{2} \leq S \leq \frac{9+4\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore OA = OB = 4,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAO - \angle BAD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned}
 AE &= \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}, \\
 \therefore OE &= AO - AE = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, \\
 \therefore D &\left(-\frac{3}{2}, 4 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).
 \end{aligned}$$

(2) ① $\therefore$ 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ACE$,

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD,$$

$$\therefore AE = AD = 2, \angle CAE = \angle BAD,$$

$$\therefore A(0, 4), B(-4, 0), C(4, 0),$$

$$\therefore AO = CO = BO = 4,$$

$$\text{又} \therefore \angle AOB = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOB \text{ 和 } \triangle AOC \text{ 都是等腰直角三角形},$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAO + \angle CAO = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle DAE &= \angle CAD + \angle CAE = \angle CAD + \angle BAD \\
 &= \angle BAC = 90^\circ,
 \end{aligned}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中}, AE = AD = 2,$$

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

② 由①可知 $\triangle AOB$ 和 $\triangle AOC$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ABO = \angle ACO = 45^\circ,$$

$$\text{由①可知 } \triangle ACE \cong \triangle ABD,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle BCF + \angle CBF = \angle ACB + \angle ACE + \angle CBF$$

$$= \angle ACB + \angle ABD + \angle CBF$$

$$= \angle ACB + \angle ABC$$

$$= 45^\circ + 45^\circ$$

$$= 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = 180^\circ - (\angle BCF + \angle CBF)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BF \perp CE.$$

(3) 由(2)可知: $\triangle ACE_1 \cong \triangle ABD_1$,

$$\therefore CE_1 = BD_1, \angle ACE_1 = \angle ABD_1,$$

$$\therefore N \text{ 为 } D_1E_1 \text{ 的中点}, P \text{ 为 } D_1C \text{ 的中点}, BO = CO,$$

$$\therefore PN \text{ 是 } \triangle CD_1E_1 \text{ 的中位线}, PO \text{ 是 } \triangle BCD_1 \text{ 的中位线},$$

$$\begin{aligned}
&\therefore PN \parallel CE_1, PN = \frac{1}{2}CE_1, OP \parallel BD_1, OP = \frac{1}{2}BD_1 \\
&\therefore OP = PN, \angle D_1PN = \angle D_1CE_1 = \angle ACD_1 + \angle ACE_1, \\
&\angle POC = \angle CBD_1, \\
&\therefore \angle OPD_1 \text{ 是 } \triangle OPC \text{ 的外角,} \\
&\therefore \angle OPD_1 = \angle COP + \angle OCD_1, \\
&\therefore \angle OPN = \angle D_1PN + \angle D_1PO \\
&= \angle D_1CE_1 + \angle POC + \angle OCD_1 \\
&= \angle ACD_1 + \angle ACE_1 + \angle BCD_1 + \angle CBD_1 \\
&= \angle ACD_1 + \angle ABD_1 + \angle BCD_1 + \angle CBD_1 \\
&= \angle ABC + \angle ACB \\
&= 45^\circ + 45^\circ \\
&= 90^\circ, \\
&\therefore \triangle OPN \text{ 是等腰直角三角形,} \\
&\therefore S_{\triangle OPN} = \frac{1}{2}OP \cdot PN = \frac{1}{2}OP^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}BD_1\right)^2 = \frac{1}{8}BD_1^2, \\
&\text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中, } AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \\
&\text{又 } \because AD = 2, \\
&\therefore \text{在 } \triangle ADE \text{ 旋转的过程中, 当点 } D_1 \text{ 在线段 } BA \text{ 上时, } BD_1 \text{ 最短, 此时} \\
&BD_1 = BA - AD_1 = 4\sqrt{2} - 2, \\
&S_{\triangle OPN} = \frac{1}{8}BD_1^2 = \frac{1}{8} \times (4\sqrt{2} - 2)^2 = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{2}, \\
&\text{在 } \triangle ADE \text{ 旋转的过程中, 当点 } D_1 \text{ 在线段 } BA \text{ 的延长线上时, } BD_1 \text{ 最长, 此时} \\
&BD_1 = BA + AD_1 = 4\sqrt{2} + 2, \\
&S_{\triangle OPN} = \frac{1}{8}BD_1^2 = \frac{1}{8} \times (4\sqrt{2} + 2)^2 = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore \triangle OPN \text{ 面积 } S \text{ 的变化范围是 } \frac{9 - 4\sqrt{2}}{2} \leq S \leq \frac{9 + 4\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

经典再现

10. 在平面直角坐标系中, 四边形 $AOBC$ 是矩形, 点 $O(0,0)$, 点 $A(5,0)$, 点 $B(0,3)$, 以点 A 为中心, 顺时针旋转矩形 $AOBC$, 得到矩形 $ADEF$, 点 O, B, C 的对应点分别为 D, E, F .
- (1) 如图①, 当点 D 落在 BC 边上时, 求点 D 的坐标.

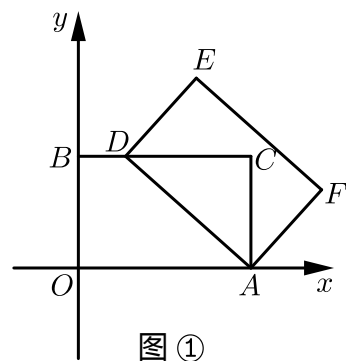


图 ①

(2) 如图②, 当点 D 落在线段 BE 上时, AD 与 BC 交于点 H .

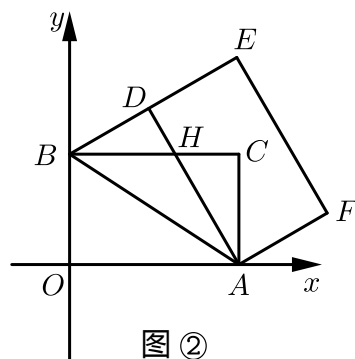


图 ②

① 求证 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$.

② 求点 H 的坐标.

(3) 记 K 为矩形 $AOBC$ 对角线的交点, S 为 $\triangle KDE$ 的面积, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) 点 D 的坐标为 $(1, 3)$.

(2) ① 证明见解析.

② 点 H 的坐标为 $(\frac{17}{5}, 3)$.

(3) $\frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}$.

【解析】 (1) 方法一: $\because$ 点 $A(5, 0)$, 点 $B(0, 3)$,

$\therefore OA = 5, OB = 3$,

$\because$ 四边形 $AOBC$ 是矩形,

$\therefore AC = OB = 3, BC = OA = 5, \angle OBC = \angle C = 90^\circ$,

$\because$ 矩形 $ADEF$ 是由矩形 $AOBC$ 旋转得到的,

$\therefore AD = AO = 5$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, 有 $AD^2 = AC^2 + DC^2$,

$\therefore DC = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore BD = BC - DC = 1$,

∴点D的坐标为(1, 3) .

方法二：如图①中，

∵A(5, 0), B(0, 3),

∴OA = 5, OB = 3,

∴四边形AOBC是矩形，

∴AC = OB = 3, OA = BC = 5,

∠OBC = ∠C = 90°，

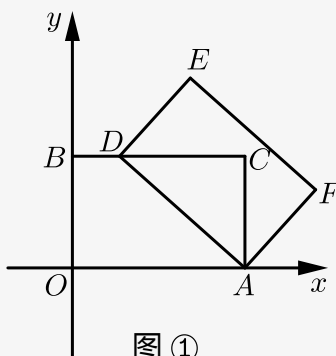
∴矩形ADEF是由矩形AOBC旋转得到，

∴AD = AO = 5,

在Rt△ADC中， $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = 4$,

∴BD = BC - CD = 1,

∴D(1, 3) .



图①

(2) ① 方法一：由四边形ADEF是矩形，得∠ADE = 90°，

又点D在线段BE上，

得∠ADB = 90°，

由(I)可知，AD = AO，又AB = AB，∠AOB = 90°，

∴Rt△ADB ≅ Rt△AOB .

方法二：①如图②中，

由四边形ADEF是矩形，得到∠ADE = 90°，

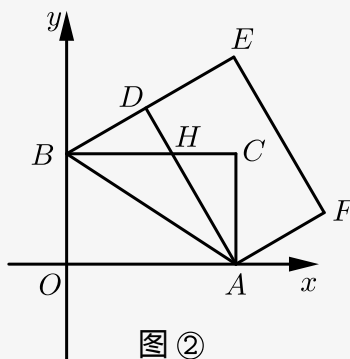
∴点D在线段BE上，

∴∠ADB = 90°，

由(1)可知，AD = AO，又AB = AB，

∠AOB = 90°，

∴Rt△ADB ≅ Rt△AOB(HL) .



图②

② 方法一：由△ADB ≅ △AOB，得∠BAD = ∠BAO，

又在矩形AOBC中，OA // BC，

∴∠CBA = ∠OAB，

∴∠BAD = ∠CBA .

∴BH = AH，

设BH = t，则AH = t，HC = BC - BH = 5 - t .

在Rt△AHC中，有AH² = AC² + HC²，

∴t² = 3² + (5 - t)²，

$$\begin{aligned} \text{解得 } t &= \frac{17}{5} . \\ \therefore BH &= \frac{17}{5} . \\ \therefore \text{点 } H &\text{的坐标为 } \left(\frac{17}{5}, 3 \right) . \end{aligned}$$

方法二：如图②中，

由 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ ，得到 $\angle BAD = \angle BAO$

，

又在矩形 $AOBC$ 中， $OA \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle CBA = \angle OAB ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CBA ,$$

$$\therefore BH = AH , \text{ 设 } AH = BH = m , \text{ 则}$$

$$HC = BC - BH = 5 - m ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中，

$$\therefore AH^2 = HC^2 + AC^2 ,$$

$$\therefore m^2 = 3^2 + (5 - m)^2 ,$$

$$\therefore m = \frac{17}{5} ,$$

$$\therefore BH = \frac{17}{5} ,$$

$$\therefore H \left(\frac{17}{5}, 3 \right) .$$

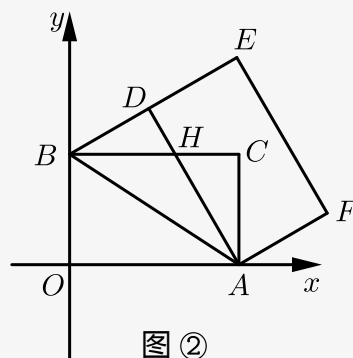
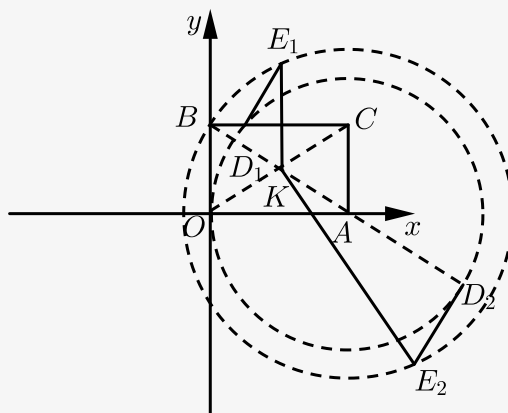


图 ②

(3) 方法一：当 DE 与小 $\odot A$ 相切时取得最值，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，



$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} ,$$

$$\therefore AK = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{34}}{2} ;$$

$$\textcircled{1} D_1K = AD_1 - AK = 5 - \frac{\sqrt{34}}{2} ,$$

$$S_{\triangle D_1E_1K} = \frac{1}{2} \cdot D_1K \cdot D_1E = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 - \frac{\sqrt{34}}{2} \right) = \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} ;$$

$$\textcircled{2} D_2K = AD_2 + AK = 5 + \frac{\sqrt{34}}{2} ,$$

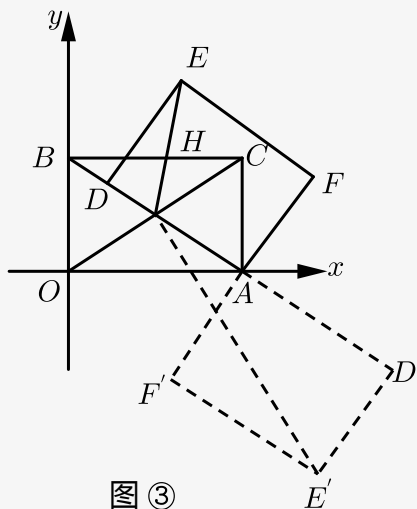
$$S_{\triangle D_2 E_2 K} = \frac{1}{2} \cdot D_2 K \cdot D_2 E = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 + \frac{\sqrt{34}}{2} \right) = \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4};$$

$$\therefore \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}.$$

方法二：如图③中，

当点 D 在线段 BK 上时，

$ADEK$ 的面积最小，最小值



图③

$$= \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DK = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 - \frac{\sqrt{34}}{2} \right) = \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4},$$

当点 D 在 BA 的延长线上时，

$\triangle D'E'K$ 的面积最大，最大面积

$$-1 \frac{1}{2} \times D'E' \times KD' = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 + \frac{\sqrt{34}}{2} \right) = \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4},$$

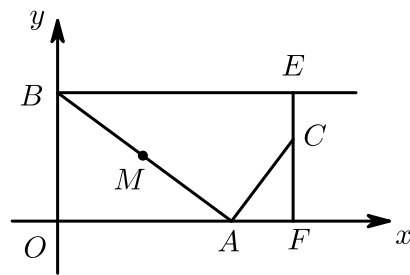
$$\text{综上所述, } \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}.$$

【标注】【知识点】圆与全等

三、旋转与线段和差问题

典题精炼1

11. 如图，点 A 是 x 轴正半轴上的动点，点 B 坐标为 $(0, 4)$ ， M 是线段 AB 的中点，将点 M 绕点 A 顺时针方向旋转 90° 得到点 C ，过点 C 作 x 轴的垂线，垂足为 F ，过点 B 作 y 轴的垂线与直线 CF 相交于点 E ，连接 AC ， BC ，设点 A 的横坐标为 t 。



- (1) 当 $t = 2$ 时, 求点 M 的坐标.
- (2) 设 $\triangle BCE$ 的面积为 S , 当点 C 在线段 EF 上时, 求 S 与 t 之间的函数关系式, 并写出自变量 t 的取值范围.
- (3) 当 t 为何值时, $BC + CA$ 取得最小值.

【答案】 (1) $M(1, 2)$.

(2) S 与 t 之间的函数关系式为: $S = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4 (0 \leq t \leq 8)$.

(3) 当 $t = 0$ 时, $BC + CA$ 有最小值.

【解析】 (1) 如图1, 过点 M 作 $MG \perp OF$ 与 G ,

$$\therefore MG \parallel OB,$$

$$\text{当 } t = 2 \text{ 时, } OA = 2,$$

$$\therefore M \text{ 是 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore G \text{ 是 } AO \text{ 的中点,}$$

$$\therefore OG = \frac{1}{2}OA = 1, MG \text{ 是 } \triangle AOB \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore MG = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore M(1, 2).$$

(2) 如图1, 同理得: $OG = AG = \frac{1}{2}t$,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO + \angle CAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF + \angle ACF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ACF,$$

$$\therefore \angle MGA = \angle AFC = 90^\circ, MA = MC,$$

$$\therefore \triangle AMG \cong \triangle CAF,$$

$$\therefore AG = CF = \frac{1}{2}t, AF = MG = 2,$$

$$\therefore EC = 4 - \frac{1}{2}t, BE = OF = t + 2,$$

$$\therefore S = S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}EC \times CE = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2}t \right) (t + 2) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4,$$

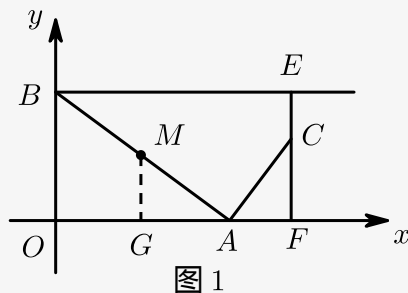


图 1

当 A 与 O 重合, C 与 F 重合, 如图2, 此时 $t = 0$,

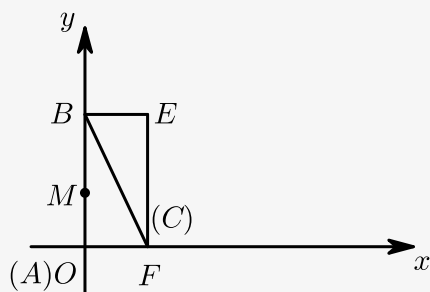


图 2

当 C 与 E 重合时, 如图3, $AG = FE$, 即 $\frac{1}{2}t = 4$, $t = 8$,

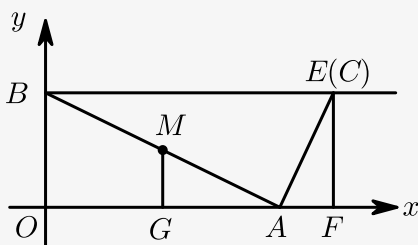


图 3

$\therefore S$ 与 t 之间的函数关系式为: $S = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4 (0 \leq t \leq 8)$.

(3) 如图1, 易得 $\triangle ABO \sim \triangle CAF$,

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{OB}{AF} = \frac{OA}{FC} = 2,$$

$$\therefore AF = 2, CF = \frac{1}{2}t,$$

由勾股定理得:

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4}t^2},$$

$$BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{(t+2)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}t\right)^2} = \sqrt{5\left(\frac{1}{4}t^2 + 4\right)},$$

$$\therefore BC + AC = (\sqrt{5} + 1)\sqrt{\frac{1}{4}t^2 + 4},$$

$\therefore$ 当 $t = 0$ 时, $BC + CA$ 有最小值.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

典题精炼2

12. 已知直线 AB 交 x 轴, y 轴于点 A , 点 B , 且 $A(6, 0)$, $\angle OAB = 30^\circ$.

(1) 如图1, 求点 B 的坐标.

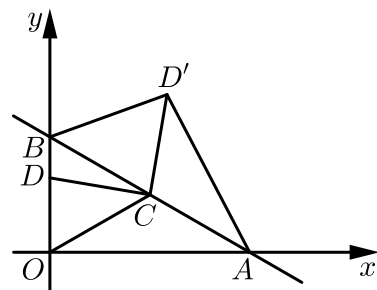


图 1

- (2) 如图1, 若点 C 为线段 AB 上一动点, 点 D 为 y 轴上一动点, 连接 OC , CD , 当 $OC + \frac{1}{2}AC$ 取得最小值时, 求点 C 的坐标.
- (3) 如图1, 将第(2)问中的线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 90° 得线段 CD' , 连接 BD' , AD' , 求 $BD' + AD'$ 的最小值.

【答案】 (1) $B(0, 2\sqrt{3})$.

(2) $C(3, \sqrt{3})$.

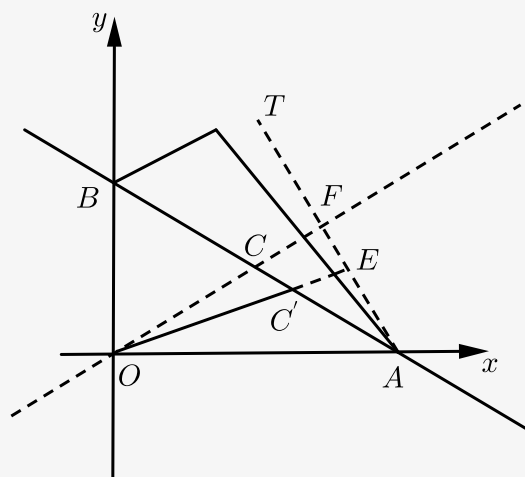
(3) $6\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle OAB = 30^\circ$, $A(6, 0)$,

$$\therefore OB = OA \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore B(0, 2\sqrt{3}).$$

- (2) 如图中, 作直线 OA 关于直线 AB 的对称的中线 AT , 作 $C'E \perp AT$ 于 E , $OF \perp AT$ 于 F , 交 AB 于 C ,



$$\therefore \angle BAT = \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\therefore C'E = \frac{1}{2}AC',$$

$$\therefore OC' + \frac{1}{2}C'A = OC' + C'E,$$

$OC + \frac{1}{2}AC$ 得最小值,

$$\therefore \angle COA = \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBO = \angle COB = 60^\circ,$$

$$\therefore BC = OC = CA,$$

$$\therefore B(0, 2\sqrt{3}) , A(6, 0) ,$$

$$\therefore C(3, \sqrt{3})$$

$$\therefore D'F = CE = 3,$$

$\therefore$ 点 D' 在直线 $y = 3 + \sqrt{3}$ 上运动,

作点 B 关于该直线的对称点 $H(0, 6)$, 连接 AH 交直线 $y = 3 + \sqrt{3}$ 于 D' ,

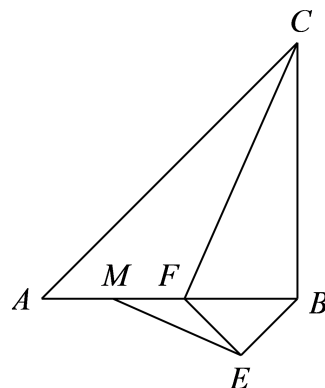
$$\therefore OH = OA = 6,$$

$$\therefore AH = 6\sqrt{2},$$

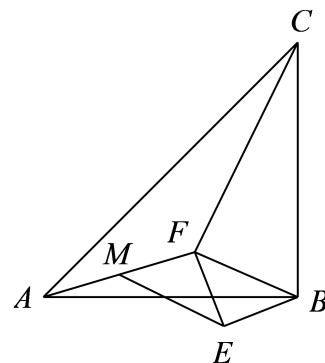
$\therefore BD' + AD'$ 的最小值为 $6\sqrt{2}$.

典题精炼3

13. 如图, $\triangle ABC$ 、 $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形, $\angle ABC = \angle BEF = 90^\circ$, $BA = BC$, $EB = EF$, 连接 AF 、 CF , M 为 AF 的中点.



- (1) 当 A 、 F 、 B 共线时, 求证: $ME = \frac{1}{2}CF$.
- (2) 如图, 当 A 、 F 、 B 不共线时, 求证: $ME = \frac{1}{2}CF$.



- (3) 设 $BC = 2$, 请直接写出 $BF + AF + CF$ 的最小值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

【解析】(1) 延长 FE 、 CB 交于点 G , 连接 AG , 如图,

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle ABG = \angle CBF, \\ BG = BF \end{cases}$$

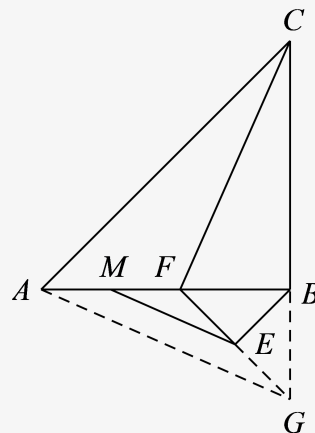
$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CBF$,

$\therefore AG = CF$,

$\because M$ 、 E 分别为 AF 和 FG 中点,

$\therefore ME$ 是 $\triangle AFG$ 的中位线,

$\therefore ME = \frac{1}{2}AG$,



$$\therefore ME = \frac{1}{2}CF.$$

(2) 延长 FE 到 D , 使 $DE = EF$, 连接 AD 、 BD , 如图,

$\because \triangle BEF$ 为等腰直角三角形, $\angle BEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFE = 45^\circ$, $BE \perp DF$,

$\therefore BE$ 垂直平分 DF , $\angle BDE = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BDF$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle CBF + \angle ABF = 90^\circ$,

$\angle ABD + \angle ABF = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBF = \angle ABD$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle CBF = \angle ABD, \\ BD = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBF(SAS)$,

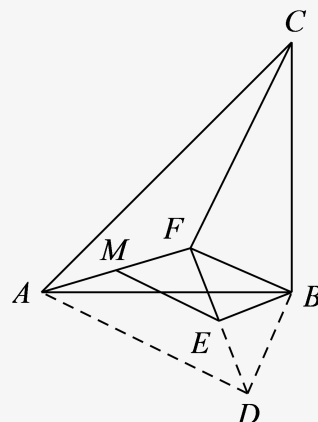
$\therefore AD = CF$,

$\because M$ 为 AF 中点, $DE = EF$,

$\therefore ME$ 是 $\triangle ADF$ 中位线,

$$\therefore ME = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore ME = \frac{1}{2}CF.$$



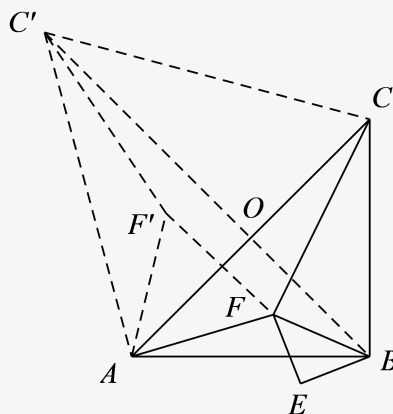
(3) 如图, 将 $\triangle AFC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AF'C'$,

连接 CC' , BC' ,

可得 $\triangle AFF'$ 、 $\triangle ACC'$ 为等边三角形,

即 $AF = FF'$, $CF = C'F'$,

$\therefore$



$$AF + BF + CF = FF' + BF + C'F',$$

则当 $AF + BF + CF$ 取最小值时, 点 C' 、 F' 、 F 、 B 四点共线,

$$\text{即}(AF + BF + CF)_{\min} = BC',$$

$$\because BC = 2,$$

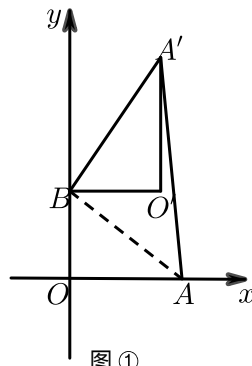
$$\therefore CC' = AC = 2\sqrt{2}, BO = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = \sqrt{2}, C'O = \frac{\sqrt{3}}{2}CC' = \sqrt{6},$$

$$\therefore AF + BF + CF \text{取最小值为} \sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

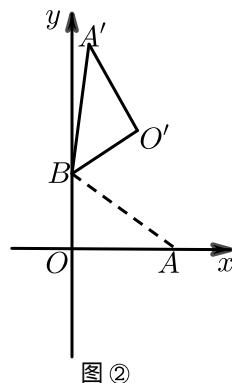
经典再现

14. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(4, 0)$ ，点 $B(0, 3)$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转，得 $\triangle A'BO'$ ，点 A ， O 旋转后的对应点为 A' ， O' ．记旋转角为 α ．

(1) 如图①，若 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AA' 的长．



(2) 如图②，若 $\alpha = 120^\circ$ ，求点 O' 的坐标．



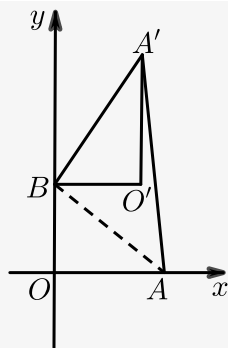
(3) 在(2)的条件下，边 OA 上的一点 P 旋转后的对应点为 P' ，当 $O'P + BP'$ 取得最小值时，求点 P' 的坐标．

【答案】(1) $5\sqrt{2}$ ．

(2) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ．

(3) $\left(\frac{6\sqrt{3}}{5}, \frac{27}{5}\right)$ ．

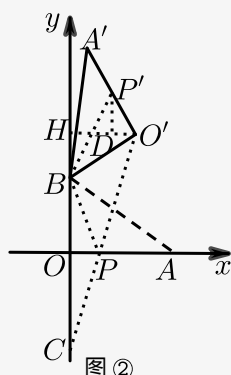
【解析】(1) 如图①，



图①

$\because$ 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$,
 $\therefore OA = 4$, $OB = 3$,
 $\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,
 $\because \triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 90° 得 $\triangle A'BO'$,
 $\therefore BA = BA'$, $\angle ABA' = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle ABA'$ 为等腰直角三角形 ,
 $\therefore AA' = \sqrt{2}BA = 5\sqrt{2}$.

(2) 作 $O'H \perp y$ 轴于 H , 如图② ,



图②

$\because \triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 120° 得 $\triangle A'BO'$,
 $\therefore BO = BO' = 3$, $\angle OBO' = 120^\circ$,
 $\therefore \angle HBO' = 60^\circ$,
 在 $\text{Rt}\triangle BHO'$ 中 ,
 $\because \angle BO'H = 90^\circ - \angle HBO' = 30^\circ$,
 $\therefore BH = \frac{1}{2}BO' = \frac{3}{2}$, $O'H = \sqrt{3}BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore OH = OB + BH = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$,
 $\therefore$ 点 O' 的坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

(3) $\because \triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 120° 得 $\triangle A'BO'$, 点 P 的对应点为 P' ,
 $\therefore BP = BP'$,
 $\therefore O'P + BP' = O'P + BP$,

作 B 点关于 x 轴的对称点 C ，连结 $O'C$ 交 x 轴于 P 点，如图②，
 则 $O'P + BP = O'P + PC = O'C$ ，此时 $O'P + BP$ 的值最小，

$\because$ 点 C 与点 B 关于 x 轴对称，

$$\therefore C(0, -3),$$

设直线 $O'C$ 的解析式为 $y = kx + b$ ，

把 $O'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ， $C(0, -3)$ 代入得

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}k + b = \frac{9}{2} \\ b = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ b = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $O'C$ 的解析式为 $y = \frac{5\sqrt{3}}{3}x - 3$ ，

当 $y = 0$ 时， $\frac{5\sqrt{3}}{3}x - 3 = 0$ ，

$$\text{解得} x = \frac{3\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{则} P\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}, 0\right),$$

$$\therefore OP = \frac{3\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore O'P' = OP = \frac{3\sqrt{3}}{5},$$

作 $P'D \perp O'H$ 于 D ，

$\because \angle BO'A = \angle BOA = 90^\circ$ ， $\angle BO'H = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle DP'O' = 30^\circ$ ，

$$\therefore O'D = \frac{1}{2}O'P' = \frac{3\sqrt{3}}{10}, P'D = \sqrt{3}O'D = \frac{9}{10},$$

$$\therefore DH = O'H - O'D = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{6\sqrt{3}}{5},$$

$$y_{P'} = OH + DP' = \frac{9}{2} + \frac{9}{10} = \frac{27}{5}$$

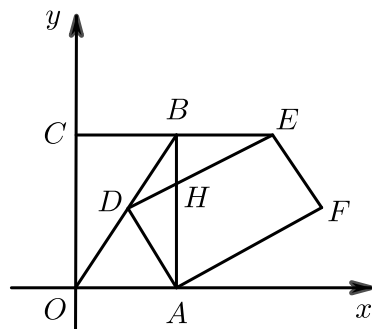
$$\therefore P' \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{6\sqrt{3}}{5}, \frac{27}{5}\right).$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

四、存在性问题

15. 在平面直角坐标系中，四边形 $OACB$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(3,0)$ ，点 $C(0,4)$ ，连接 OB ，以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOCB$ ，旋转角为 $\alpha(0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O, C, B 的对应点分别为 D, E, F 。

(1) 如图，当点 D 落在对角线 OB 上时，求点 D 的坐标。



(2) 在(1)的情况下， AB 与 DE 交于点 H 。

① 求证 $\triangle BDE \cong \triangle DBA$ 。

② 求点 H 的坐标。

(3) α 为何值时， $FB = FA$ 。(直接写出结果即可)。

【答案】 (1) $\left(\frac{54}{25}, \frac{72}{25}\right)$ 。

(2) ① 证明见解析。

② $H\left(3, \frac{25}{8}\right)$ 。

(3) $\alpha = 60^\circ$ 或 300° 。

【解析】 (1) $\because$ 点 $A(3, 0)$ ，点 $B(0, 4)$ ，

$$\therefore OA = 3, AB = 4.$$

$\because$ 矩形 $DAFE$ 是由矩形 $AOCB$ 旋转得到的，

$$\therefore AD = AO = 3.$$

$$\text{在Rt}\triangle OAB\text{中}, OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 5,$$

过 A, D 分别作 $AM \perp OB, DN \perp OA$ 。

在 $\text{Rt}\triangle OAM$ 中，有

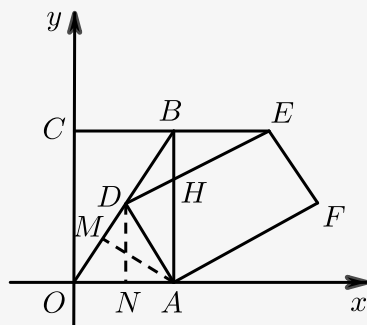
$$\sin \angle BOA = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{OB} = \frac{4}{5}, \cos \angle BOA = \frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AM = \frac{12}{5}, OM = \frac{9}{5}.$$

$$\therefore OD = 2OM = \frac{18}{5}.$$

$$\text{在Rt}\triangle ODN\text{中}, \sin \angle BOA = \frac{DN}{OD} = \frac{4}{5}, \text{得} DN = \frac{72}{25}.$$

$$\text{同理可得} ON = \frac{54}{25}.$$



$\therefore$ 点 D 的坐标为 $\left(\frac{54}{25}, \frac{72}{25}\right)$.

(2) ① $\because$ 矩形 $DAFE$ 是由矩形 $AOBC$ 旋转得到的,

$\therefore OA = AD = 3, \angle ADE = 90^\circ, DE = AB = 4$.

$\therefore OD = AD$.

$\therefore \angle DOA = \angle ODA$.

又 $\because \angle DOA + \angle OBA = 90^\circ, \angle BOH + \angle ADO = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle BDE$.

又 $\because BD = BD$,

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle DBA$.

② 由 $\triangle BDE \cong \triangle DBA$, 得 $\angle BEH = \angle DAH, BE = AD = 3$.

又 $\because \angle BHE = \angle DHA$,

$\therefore \triangle BHE \cong \triangle DHA$.

设 $AH = HE = x$, 则 $DH = BH = 4 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ODN$ 中, $AH^2 = AD^2 + DH^2$,

即 $x^2 = 3^2 + (4 - x)^2$, 得 $x = \frac{25}{8}$,

$\therefore AH = \frac{25}{8}$.

$\therefore$ 点 H 的坐标为 $\left(3, \frac{25}{8}\right)$.

(3) $\alpha = 60^\circ$ 或 300° .

【标注】【知识点】矩形与全等综合

典题精炼2

16. 如图1, 在平面直角坐标系中, 已知 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 点 A 的坐标是 $(0, 4)$, 点 B 在第一象限, 点 $P(t, 0)$ 是 x 轴上的一个动点, 连接 AP , 并把 $\triangle AOP$ 绕着点 A 按逆时针方向旋转, 使边 AO 与 AB 重合, 得到 $\triangle ABD$.

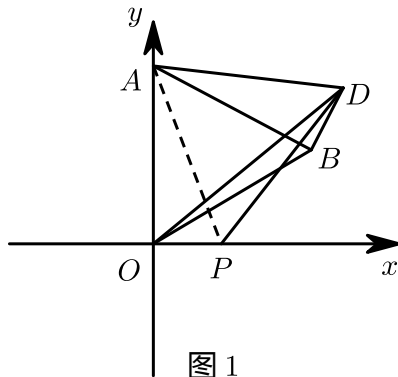


图 1

(1) 当 $t = \sqrt{3}$ 时, 求 PD 的长.

(2) 在点 P 运动过程中, 依照条件所形成的 $\triangle OPD$ 面积为 S .

① 求 $t > 0$ 时, 求 S 与 t 之间的函数关系式.

② 当 $t \leq 0$ 时, 要使 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标.

【答案】 (1) $\sqrt{19}$.

$$(2) \textcircled{1} \quad S = \frac{1}{2}t \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + t(t > 0).$$

$$\textcircled{2} \quad P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), P_2(-\sqrt{3}, 0), P_3\left(\frac{-\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0\right).$$

【解析】(1) 由已知得: $OA = 4$, $OP = t$,

$\therefore \triangle ABD$ 由 $\triangle AOP$ 旋转得到,

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AOP,$$
$$\therefore AP = AD, \angle DAB = \angle PAO,$$
$$\therefore \angle DAP = \angle BAO = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADP$ 为等边三角形,

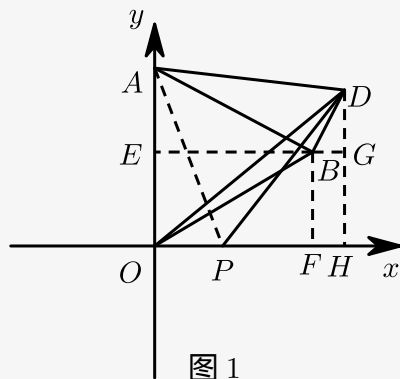
$$\therefore DP = AP,$$

当 $t = \sqrt{3}$ 时, 有 $OP = \sqrt{3}$,

$$\therefore DP = AP = \sqrt{AO^2 + OP^2} = \sqrt{19}.$$

(2) ① 当 $t > 0$ 时, 如图1, $BD = OP = t$,

过点 B 、 D 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 F 、 H ，过 B 点作 x 轴平行线，分别交 y 轴于点 E ，交 DH 于点 G ．



$\because \triangle OAB$ 为等边三角形, $BE \perp y$ 轴,

$$\therefore \angle ABE = 30^\circ, AE = OE = 2,$$

又 $\because \angle ABD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DBG = 60^\circ,$$

$$\therefore BG = BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\therefore GH = OE = 2,$$

$$\therefore DH = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}t \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + t (t > 0).$$

② 1) 当 $-\frac{4\sqrt{3}}{3} < t \leq 0$ 时, $BD = OP = -t$, $BG = -\frac{\sqrt{3}}{2}t$,

$$\therefore DH = GF = BF - BG = 2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\therefore -\frac{1}{2}t \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{解得 } t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, t_2 = -\sqrt{3},$$

$$\therefore P_1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), P_2(-\sqrt{3}, 0).$$

2) 当 $t \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, $BD = OP = -t$, $DG = -\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

$$\therefore \frac{1}{2}(-t) \left(-2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

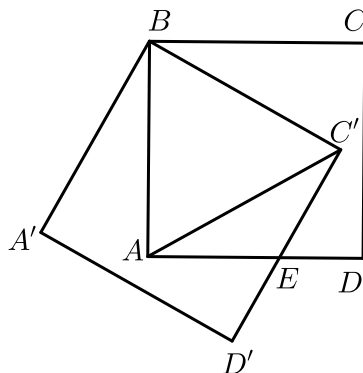
$$\therefore t_1 = \frac{-\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}, t_2 = \frac{\sqrt{21} - 2\sqrt{3}}{3} \text{ (舍)},$$

$$\therefore P_3 \left(\frac{-\sqrt{21} - 2\sqrt{3}}{3}, 0 \right).$$

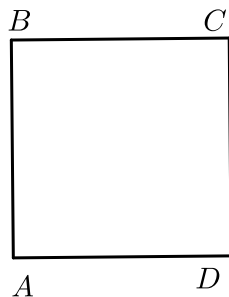
【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

典题精炼3

17. 如图a, 将正方形ABCD绕点B顺时针旋转 α ($0 < \alpha < 90^\circ$) 得到正方形A'BC'D', 连接AC'、AD'.



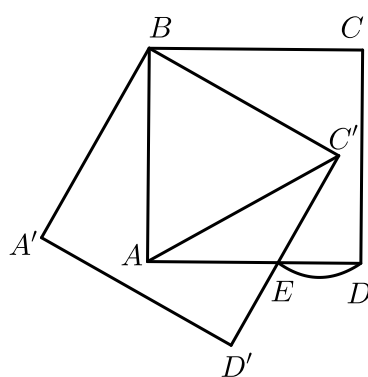
图a



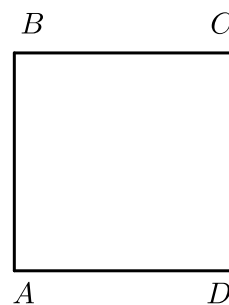
备用图1

- (1) 当 $\alpha = 20^\circ$ 时, $\angle AC'D' = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 如图b, 若正方形 $ABCD$ 的边长为4, 当 $\angle C'AD' = 90^\circ$ 时, 求 DE 的长.



图b



备用图2

(3) 当旋转角 α 为多少时, $\triangle AD'C'$ 是等腰三角形.

【答案】 (1) 35°

(2) 2.

(3) $\alpha = 30^\circ$ 或 60° 时, $\triangle AD'C'$ 是等腰三角形.

【解析】 (1) 由旋转性质可知正方形 $ABCD \cong$ 正方形 $A'BC'D'$,

$$\angle CBC' = \angle ABA' = \alpha = 20^\circ,$$

$$\because BA = BC', \angle ABC = \angle BC'D' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC' = \angle ABC - \angle CBC' = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ,$$

$$\because BA = BC',$$

$$\therefore \angle BC'A = \frac{180^\circ - \angle ABC'}{2} = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'D' = \angle BC'D' - \angle BC'A = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

(2) $\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为4, 正方形 $ABCD \cong$ 正方形 $A'BC'D'$,

$$\therefore BA = BC' = AD = C'D' = 4, \angle BAD = \angle BC'D' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC' = \angle BC'A,$$

$$\therefore \angle BAD - \angle BAC' = \angle BC'D' - \angle BC'A.$$

$$\text{即 } \angle EAC' = \angle EC'A,$$

$$\therefore EA = EC',$$

$$\because \angle C'AD' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC' + \angle EAD' = 90^\circ,$$

$$\angle EC'A + \angle ED'A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD' = \angle ED'A,$$

$$\therefore EA = ED',$$

$$\therefore EC' = ED',$$

$$\therefore EC' + ED' = C'D' = 4 ,$$

$$\therefore EC' = ED' = 2 ,$$

$$\therefore EA = 2 ,$$

$$\therefore DE = AD - EA = 4 - 2 = 2 .$$

(3) ① $C'A = C'D'$ 时 , (图1) ,

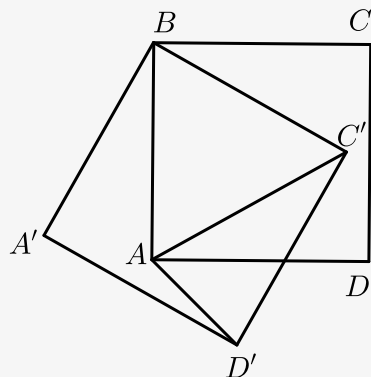


图1

$$\therefore C'D' = BC' = BA ,$$

$$\therefore C'A = BA = BC' ,$$

$\therefore \triangle BAC'$ 是等边三角形 ,

$$\therefore \angle ABC' = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CBC' = \angle ABC - \angle ABC' = 30^\circ ,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ .$$

② $AC' = AD'$ 时 , (图2) ,

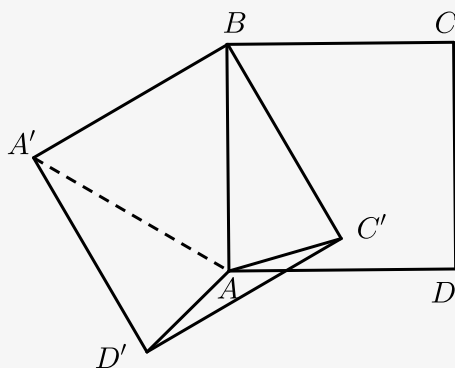


图2

连接 $A'A$,

$$\therefore AD' = AC' ,$$

$$\therefore \angle AD'C' = \angle AC'D' ,$$

$$\therefore \angle A'D'C' = \angle BC'D' = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle A'D'C' - \angle AD'C' = \angle BC'D' - \angle AC'D' ,$$

即 $\angle A'D'A = \angle BC'A$,

在 $\triangle A'D'A$ 和 $\triangle BC'A$ 时,

$$\begin{cases} A'D' = BC' \\ \angle A'D'A = \angle BC'A \\ AD' = AC' \end{cases}$$

$\therefore \triangle A'D'A \cong \triangle BC'A$,

$\therefore A'A = BA$,

$\therefore A'B = AB$,

$\therefore A'A = A'B = AB$,

$\therefore \triangle AA'B$ 是等边三角形,

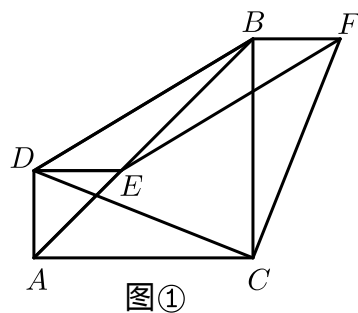
$\therefore \angle A'BA = 60^\circ$,

$\therefore \alpha = \angle A'BA = 60^\circ$,

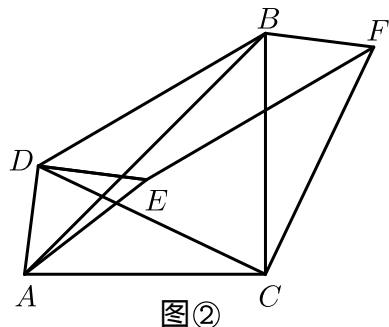
综上 $\alpha = 30^\circ$ 或 60° 时, $\triangle AD'C'$ 是等腰三角形.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

18. 如图①, E 在 AB 上, $\triangle ACB$ 、 $\triangle ADE$ 都为等腰直角三角形, $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$, 连接 DB , 以 DE 、 DB 为边作平行四边形 $DBFE$, 连接 FC 、 DC .



- (1) 请根据图①, 猜想线段 CD 、 CF 的数量关系与位置关系分别是: _____、_____.
- (2) 若将图①中 $\triangle ADE$ 绕 A 点顺时针旋转, 其它条件不变, 如图②, (1) 的结论是否成立? 说明理由.



- (3) 将图①中的 $\triangle ADE$ 绕 A 点顺时针旋转 α° , $0 < \alpha \leq 360$, 其它条件不变, 当四边形 $DBFE$ 为矩形时, 直接写出 α 的值.

【答案】(1) $CD \perp CF$; $CD = CF$

(2) 结论成立, 证明见解析.

(3) α 为 45° 或 225° 时, 四边形 $EFBD$ 是矩形.

【解析】(1) $CD \perp CF$, $CD = CF$.

如题干图①中,

$\because \triangle ACB$ 、 $\triangle ADE$ 都为等腰直角三角形, $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AD = DE$, $AB = BC$,

$\therefore \angle AED = \angle DAE = \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形,

$\therefore DE = BF$, $DE \parallel BF$,

$\therefore AD = BF$, $\angle BEF = \angle DEB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,

$\therefore \angle FBC = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \angle CAB + \angle DAE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \angle CBF$,

$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBF$,

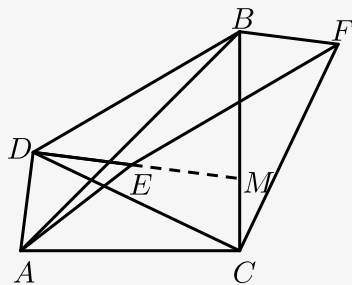
$\therefore CD = CF$, $\angle ACD = \angle BCF$,

$\therefore \angle DCF = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore CD \perp CF$, $CD = CF$.

(2) 结论成立.

如图③中, 延长 DE 交 BC 于 M .



图③

$\because \triangle ACB$ 、 $\triangle ADE$ 都为等腰直角三角形, $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AD = DE$, $AB = BC$,

$\therefore \angle AED = \angle DAE = \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形,

$\therefore DE = BF$, $DE \parallel BF$,

$\therefore \angle FBC = \angle DMB$,

$$\therefore \angle DAC + \angle CMD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ, \angle DMB + \angle CMD = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DMB,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle CAD,$$

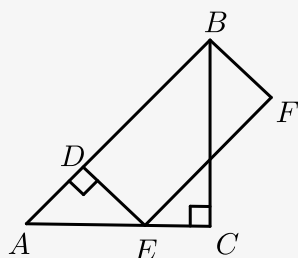
$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBF,$$

$$\therefore CD = CF, \angle ACD = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle ACB = 90^\circ,$$

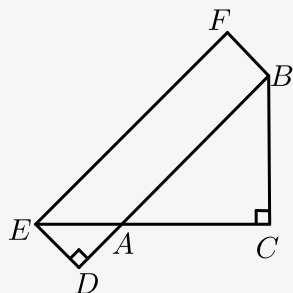
$$\therefore CD \perp CF, CD = CF.$$

(3) 如图④中, 当旋转角 $\alpha = 45^\circ$ 时, 四边形 $BDEF$ 是矩形.



图④

如图⑤中, 当旋转角 $\alpha = 225^\circ$ 时, 四边形 $BDEF$ 是矩形;



图⑤

综上所述, α 为 45° 或 225° 时, 四边形 $EFBD$ 是矩形.

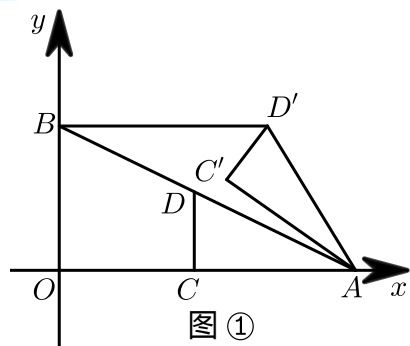
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

五、共线问题

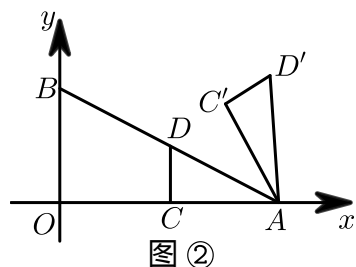
典题精炼

19. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $A(8,0)$, 点 $B(0,4)$, 点 C, D 分别是边 OA, AB 的中点. 将 $\triangle ACD$ 绕点 A 顺时针方向旋转, 得 $\triangle AC'D'$, 记旋转角为 α .

(1) 如图①, 连接 BD' , 当 $BD' \parallel OA$ 时, 求点 D' 的坐标.



(2) 如图②, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 求点 C' 的坐标.



(3) 当点 B, D', C' 共线时, 求点 C' 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $D'(6, 4)$.

(2) C' 的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$.

(3) $C'_1(8, 4)$, $C'_2\left(\frac{24}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

【解析】 (1) 过点 D' 作 $D'H \perp OA$, 垂足为 H ,

$\because OA = 8, OB = 4$, 得

$AB = 4\sqrt{5}$,

$\because D$ 是 AB 的中点, 得 $AD = 2\sqrt{5}$

$\because \triangle AC'D'$ 是 $\triangle ACD$ 旋转得到

的,

$\therefore AD' = AD = 2\sqrt{5}$,

$\because BD' \parallel OA$, 得 $D'H = OB = 4$,

$\therefore HA = \sqrt{AD'^2 - D'H^2} = 2$,

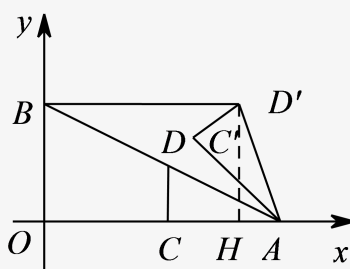
$\therefore OH = OA - HA = 6$,

得点 $D'(6, 4)$.

(2) $\because \alpha = 60^\circ$, 得 $\angle CBC' = 60^\circ$,

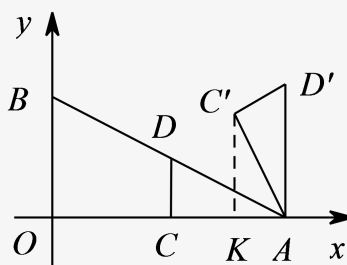
过 C' 作 $C'K \perp DA$, 于 K ,

$\because C$ 为 OA 的中点, 得 $AC = 4$, 且 $AC' = 4$,



$$\therefore AK = 2, C'K = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 C' 的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$.



(3) ①情况：四边形 $OAC'B$ 形成一个矩形， $C'(8, 4)$ ，

②情况： $\triangle BOM \cong \triangle AC'M$ ，

设 $OM = x$ ， $AM = 8 - x$ ，

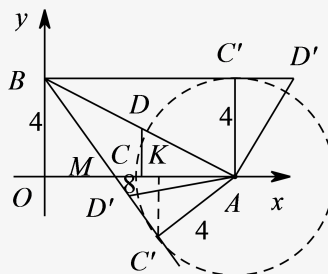
$$x^2 + 4^2 = (8 - x)^2,$$

$$x = 3,$$

$$DK = \frac{12}{5}, MK = \frac{9}{5},$$

$$\therefore OK = \frac{24}{5},$$

$$\therefore C' \left(\frac{24}{5}, -\frac{12}{5} \right).$$



【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】 30° 特殊角的性质应用

【知识点】解直角三角形

【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【知识点】勾股定理的综合应用

【知识点】勾股定理与实际应用

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】全等三角形的性质

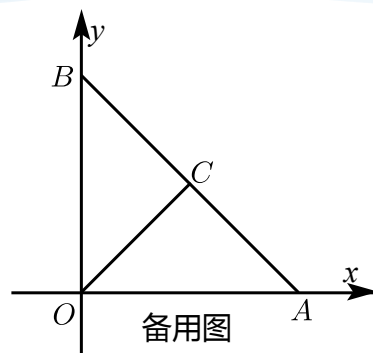
【知识点】象限内坐标的特征

【知识点】坐标系中的旋转-图形关于原点的旋转

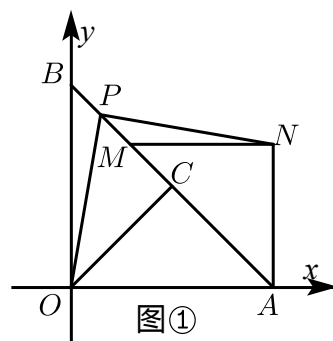
【思想】数形结合思想

【思想】方程思想

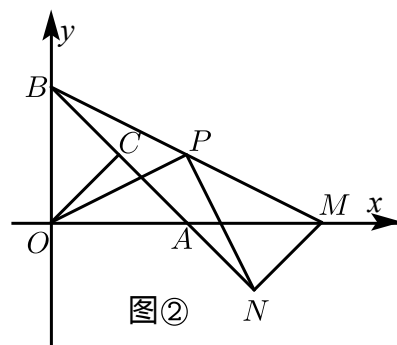
20. 在直角坐标系中， O 为坐标原点，点 $A(4, 0)$ ，点 $B(0, 4)$ ， C 是 AB 中点，连接 OC ，将 $\triangle AOC$ 绕点 A 顺时针旋转，得到 $\triangle AMN$ ，记旋转角为 α ，点 O ， C 的对应点分别是 M ， N ，连接 BM ， P 是 BM 中点，连接 OP ， PN 。



(1) 如图①, 当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 求点 M 的坐标.



(2) 如图②, 当 $\alpha = 180^\circ$ 时, 求证 $OP = PN$, 且 $OP \perp PN$.



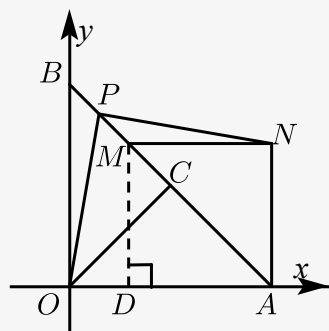
(3) 当 $\triangle AOC$ 旋转至点 B, M, N 共线时, 求点 M 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $M(4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

(2) 证明见解析.

(3) $(2, 2\sqrt{3})$ 或 $(2, -2\sqrt{3})$.

【解析】 (1) 解: 如图,



$\therefore$ 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 4)$,

$$\therefore OA = OB = 4,$$

$\therefore C$ 是 AB 中点,

$$\therefore OC = AC = \frac{1}{2}AB, \text{ 且 } OC \perp AB, \text{ 即 } \triangle AOC \text{ 为等腰直角三角形,}$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 点 M 落在 AB 上, 由旋转可知 $\triangle AMN \cong \triangle AOC$,

$$\therefore AM = OA = 4,$$

过点 M 作 $MD \perp OA$, 垂足为 D ,

$$\text{则 } MD = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AM = 2\sqrt{2}, \text{ 则 } OD = OA - AD = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } M(4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$$

(2) 如图②, 当 $\alpha = 180^\circ$ 时, 点 B, A, N 共线, 点 O, A, M 共线,

$$\therefore \angle BNM = \angle BOM = 90^\circ, \text{ 且 } P \text{ 是 } BM \text{ 中点,}$$

$$\therefore OP = BP = \frac{1}{2}BM, \text{ 且 } PN = PM = \frac{1}{2}BM,$$

$$\therefore OP = PN = PB = PM,$$

$$\text{则 } \angle PMN = \angle PNM, \angle POB = \angle PBO,$$

$$\text{可得 } \angle NPM = 180^\circ - 2\angle PMN, \angle BPO = 180^\circ - 2\angle PBO,$$

$$\therefore \angle NPM + \angle BPO = 360^\circ - 2(\angle PMN + \angle PBO),$$

$$\text{即 } \angle NPM + \angle BPO = 360^\circ - 2(\angle PMO + 45^\circ + \angle PBO),$$

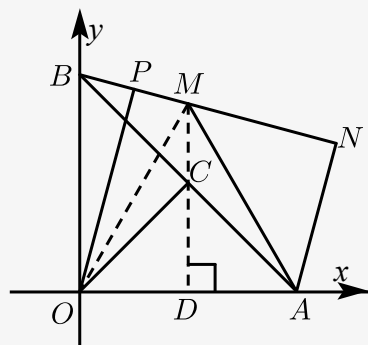
$$\therefore \angle PMO + \angle PBO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NPM + \angle BPO = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPN = 180^\circ - \angle BPO - \angle NPM = 90^\circ,$$

即 $OP \perp PN$.

(3) 当 M, N 在 x 轴上方时, 连接 OM ,



$$\therefore P \text{ 是 } BM \text{ 中点, 由 (2) 可知 } BM \perp OP,$$

$$\therefore OM = OB = OA, \text{ 由旋转可知: } OA = AM,$$

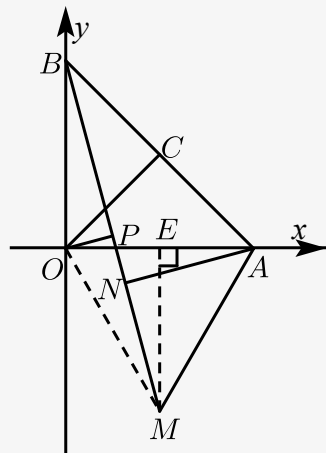
$$\therefore \triangle AOM \text{ 是等边三角形,}$$

过点 M 作 $MD \perp OA$ 于点 D ,

$$\therefore OD = \frac{1}{2}OA = 2, DM = OM \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 $M(2, 2\sqrt{3})$,

当点 M, N 在 x 轴下方时, 连接 OM , 过点 M 作 $ME \perp OA$ 于 E ,



$\therefore OP \perp BM$, P 是 MB 中点,

$\therefore OM = OB = OA$, 由旋转可知: $OA = AM$,

$\therefore \triangle AOM$ 是等边三角形,

$\therefore OE = \frac{1}{2}OA = 2$, $EM = OM \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,

故点 $M(2, -2\sqrt{3})$,

综上所述: 点 M 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$ 或 $(2, -2\sqrt{3})$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用